

Mecanica de Fluidos:

Analisis bidimensional de Flujo de Fluidos

INTRODUCCIÓN

Existen muchas formas de realizar el estudio del flujo de los fluidos, uno de ellos es utilizando como referencia un volumen de control, que en el sentido mas practico, es un método muy sencillo que provee información muy cercana a la realidad. Pero en muchos casos se desea realizar el estudio de los fluidos, estudiando puntos o pequeños paquetes de volumen en un tiempo y en una coordenada especifica.

Es allí donde entra el enfoque diferencial, expresar cada uno de los principios y leyes de fenómenos a través de ecuaciones diferenciales dependientes tanto de la coordenada como del tiempo.

Esto nos provee resultados muy exactos, y unidos a métodos numéricos y uso de computadoras puede hacer muy efectivo el cálculo y estudio de diversos fenómenos.

DEFINICIÓN DE CAMPO DE FLUJO

Se define campo de flujo como un patrón que define el comportamiento de distintas variables de flujo, (en nuestro caso flujo de fluidos), que dependen de distintas variables de campo como velocidad y presión. Estas variables de campo se encuentran en función de otras variables independientes como el desplazamiento a través de las distintas coordenadas del espacio, como también dependen de la variable tiempo. El estudio de una partícula de un fluido, utilizando el concepto de medio continuo podría muy bien extenderse su estudio a todo el comportamiento del fluido.

MÉTODO DE LAGRANGE Y EULER PARA ANALISIS DE FLUJO DE FLUIDOS

Para describir un campo de flujo, se puede adoptar cualquiera de los dos enfoques. El primer enfoque, conocido como *descripción lagrangiana* (en honor del matemático francés J. L. De Lagrange, 1736-1813), identifica cada partícula determinada de fluido y describe lo que le sucede a lo largo del tiempo. Matemáticamente la velocidad del fluido se escribe como:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\text{identidad de la partícula}, t)$$

Las variables independientes son la identidad de la partícula y el tiempo. El enfoque lagrangiano se usa ampliamente en el campo de la mecánica de los fluidos y en el estudio de la dinámica. Una descripción lagrangiana es atractiva si se trata de un número de partículas pequeño. Si todas las partículas se mueven como un sólido rígido o si todas las partículas se desplazan solamente un poco de su posición inicial o su posición de equilibrio. Sin embargo, en un fluido en movimiento, identificar y seguir el rastro de varias partículas es virtualmente imposible. Surgen complicaciones adicionales debido a que una partícula típica de fluido con frecuencia experimenta un desplazamiento largo. Por estas razones, en la mecánica de fluidos la descripción lagrangiana no es muy útil.

El segundo enfoque, denominado *descripción euleriana* (en honor de matemático suizo L. Euler, 1707-1783), fija su atención sobre un punto particular (o región) en el espacio y describe lo que sucede en ese punto (o dentro y en las fronteras de la región) a lo largo del tiempo. Las propiedades de la partícula de fluido dependen de la localización de la partícula en el espacio y el tiempo, matemáticamente, el campo de velocidad se expresa como:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$$

Las variables independientes son la posición en el espacio, representada por las coordenadas cartesianas (x, y, z) y el tiempo. Se puede hablar acerca de la velocidad del fluido a la salida de la tubería, en 3 segundos después de haberse iniciado el flujo, o de la presión del aire a 3 pulgadas adelante del toldo del automóvil. Probablemente en cada instante una partícula diferente de fluido ocupa estas posiciones, pero esto no importa. Como la identificación de puntos fijos en el espacio generalmente es más fácil que identificar piezas individuales de fluido, la descripción euleriana se emplea con mucha frecuencia en la mecánica de fluidos. Resolver un problema de flujo de fluidos requiere entonces la determinación de la velocidad, la presión, etc., en función de coordenadas de espacio y tiempo. Se puede emplear entonces las funciones

$$V(x, y, z, t) \quad \text{o} \quad P(x, y, z, t)$$

Para encontrar la velocidad o presión en cualquier lugar dentro del campo en cualquier instante, sustituyendo simplemente los valores para x, y, z y t .

La descripción euleriana resulta particularmente adecuada a los problemas de la mecánica de fluidos, ya que no establece lo que le sucede a cualquier partícula de fluido en especial. La aplicación en ingeniería de un análisis de flujo trata los efectos del movimiento de los fluidos sobre ciertos objetos, tales como los alabes de una bomba o las ventanas de un edificio. Para el diseñador de un edificio, es importante la presión sobre la ventana y no el efecto de la ventana sobre una partícula de fluido en particular.

VELOCIDAD ANGULAR Y VORTICIDAD

Matemáticamente es el rotor del vector velocidad. En dinámica de fluidos, para el campo de velocidad, vorticidad. Es una extensión del concepto de velocidad angular de una parcela de fluido que rota en torno a algún eje.

$$\vec{v} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k},$$

Si, la expresión matemática de vorticidad es definida por el vector \mathbf{q} ,

La vorticidad es un campo vectorial y se pueden dibujar curvas que son tangentes al vector \mathbf{q} en cada punto.

Se define **línea de vórtice** a una curva tangente en cada punto al vector vorticidad en ese punto.

De particular interés es la tendencia de la parcela de fluido geofísico a rotar en torno a la vertical local. Esta se representa por la componente vertical de la vorticidad, se denota con el símbolo ζ .

$$\mathbf{q} = \nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}$$

La velocidad angular instantánea (w) de una partícula de fluido es el promedio de las velocidades instantáneas de dos líneas mutuamente perpendiculares sobre la partícula de fluido de un material rígido.

Comparación del giro de partículas rectangulares

$$\zeta = \hat{k} \cdot \nabla \times \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

VELOCIDAD DE DEFORMACION VOLUMETRICA

Una partícula de fluido se puede dilatar y contraer, este proceso puede provocar un cambio en el volumen de la partícula de fluido. La velocidad de cambio dividida entre el mismo volumen se denomina *velocidad de deformación volumétrica*:

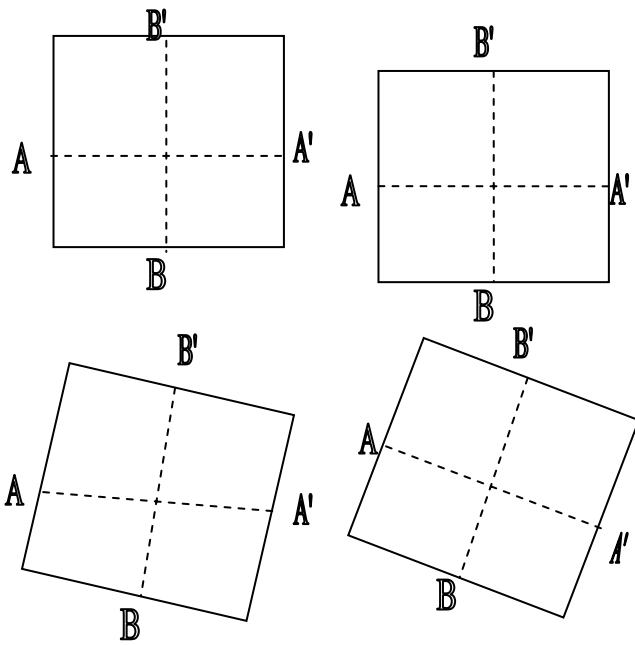
$$\frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} (\delta V)$$

El volumen de esta partícula de fluido es:

$$\delta V = (\delta x)(\delta y)(\delta z)$$

En un fluido bidireccional y bidimensional, la partícula se estira o se contrae en ambas direcciones x y y , por lo que:

$$\frac{d(\delta V)}{dt} = (\delta z)(\delta y) \frac{d(\delta x)}{dt} + (\delta z)(\delta x) \frac{d(\delta y)}{dt}$$



Se tiene que δx como la distancia entre las caras izquierda y derecha de la partícula de fluido; $d(\delta x)/dt$ es la velocidad relativa en x entre las dos caras:

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = u)_{\text{cara derecha}} - u)_{\text{cara izquierda}} \quad \delta$$

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \left(u + \frac{du}{dx} \frac{\delta x}{2}\right) - \left(u + \frac{du}{dx} \frac{\delta y}{2}\right)$$

Al simplificar se obtiene:

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \frac{du}{dx} (\delta x)$$

Empleando un argumento similar:

$$\frac{d(\delta y)}{dt} = \frac{dv}{dy} (\delta y)$$

Por lo que la velocidad de deformación volumétrica es:

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d(\delta V)}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}$$

Para un flujo tridimensional y tridireccional se tiene:

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d(\delta V)}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

VELOCIDAD DE DEFORMACION ANGULAR

Este término se define como el promedio de la diferencia en las velocidades angulares de dos elementos originalmente perpendiculares:

Teniéndose dos ángulos θ_1 y θ_2 , con sus respectivas variaciones en función del tiempo tenemos:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{dv}{dx} \quad \text{Semejante al otro ángulo:}$$

$\dot{\theta}_2 = -\frac{du}{dy}$ teniendo este signo negativo pues gira en otro sentido.

Entonces la velocidad de la deformación angular, considerando la definición sería:

$$w_z = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}\right)$$

Realizando una analogía con las otras dimensiones:

$$w_x = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta w}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z}\right)$$

$$w_z = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x}\right)$$

FLUJO A LO LARGO DE UNA LINEA DE CORRIENTE: VELOCIDAD Y ACELERACION

Consiste en la representación del flujo de un fluido mediante una partícula que se desplaza por una línea continua, representativa de la dirección del flujo. Esta línea posee la misma dirección del vector velocidad del flujo del fluido. Es importante destacar que se menciona una partícula y no un fluido, porque en la realidad un fluido no fluye a través de una línea de corriente. Debido a que se considera que la partícula se mueve en la dirección de la línea de corriente, en cualquier instante, su desplazamiento δs , con componentes δx , δy , δz , tiene la dirección del vector velocidad \mathbf{v} con componentes u , v , w en las direcciones x, y, z respectivamente. Entonces tenemos:

$$\frac{\delta x}{u} = \frac{\delta y}{v} = \frac{\delta z}{w} \quad \text{Expresamos en forma}$$

$$\text{diferencial: } \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

ECUACION DE CONTINUIDAD EN COORDENADAS CARTESIANAS, CILINDRICAS Y ESFERICAS. FUNCION DE CORRIENTES.

Ecuación de continuidad en coordenadas

rectangulares (x,y,z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Ecuación de continuidad en coordenadas

cilíndricas (r, θ, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Ecuación de continuidad en coordenadas

esféricas (r, θ, φ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0$$

Función de corriente:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Coordenadas cartesianas

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Coordenadas polares

INTEGRACION DE LA ECUACION DE EULER A LO LARGO DE UNA LINEA DE CORRIENTE

La ecuación del movimiento de Euler puede reordenarse de tal manera que cada termino contenga una derivada parcial con respecto a "x". Suponiendo que el fluido no tiene rotación :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

tenemos;

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{v^2}{2}$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} = w \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{w^2}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Sustituyendo en la ecuación de Euler y reordenando, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0$$

Definiendo $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$ como el cuadrado de las velocidades, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{(I)}$$

Similarmente para las direcciones "y" y "z".

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{(II)}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{(III)}$$

Las cantidades entre los paréntesis son las mismas en las ecuaciones I,II,III.. Estas ecuaciones establecen que la cantidad no es función de x, y,z, respectivamente, debido a que la derivada con respecto a cada dirección (x,y,z) es cero. Por consiguiente, únicamente puede ser función de t, por ejemplo F(t).

En flujo permanente $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ y F(t) se convierte en una constante E

$$\left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} \right) = E$$

ECUACION DE EULER EN COORDENADAS CARTESIANAS, CILINDRICAS Y ESFERICAS.

Ecuación de movimiento de Euler:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma h) = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z}(p + \gamma h) = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

La energía en todo el fluido es constante. Esta es la ecuación de Bernoulli para un fluido irrotacional. El término de presión puede separarse en dos partes, la presión hidrostática p_s , y la presión dinámica p_d , de tal manera $p = p_s + p_d$. Al sustituir en la ecuación anterior:

$$\left(\frac{p_s}{\rho} + \frac{p_d}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} \right) = E$$

Los dos primeros términos se puede escribir como:

$$gh + \frac{p_s}{\rho} = \frac{1}{\rho}(p_s + \gamma h)$$

donde h se mide verticalmente hacia arriba. La expresión es una constante debido a que expresa la ley hidrostática de variación de presión. Estos dos términos pueden incluirse en una constante E

$$\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} = E$$

Esta ecuación simple permite determinar la variación de la presión si se conoce la velocidad o viceversa. Suponiendo que tanto la velocidad q_0 como la presión dinámica p_0 son conocidas en un punto,

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{q_0^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2}$$

$$p = p_0 + \frac{\rho q_0^2}{2} \left(1 - \left(\frac{q}{q_0} \right)^2 \right)$$

INTEGRACION DE LA ECUACION DE EULER PARA UN FLUJO IRROTACIONAL ESTACIONARIO

La suposición de flujo irrotacional lleva a la existencia de un potencial de velocidad. Utilizando estas relaciones y suponiendo una fuerza de cuerpo conservadora, se puede integrar las ecuaciones de Euler.

Suponiendo que un fluido no tiene rotación, es decir, que es irrotacional, $\nabla \times v = 0$, o de las ecuaciones:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Estas restricciones de la velocidad se deben de cumplir en cualquier punto (con excepción de puntos

o líneas especiales singulares). La primera ecuación es la condición de irrotacionalidad para un flujo en dos dimensiones xy . Esta es la condición que hace que la expresión diferencial $u dx + v dy$ sea exacta, es decir,

$$u dx + v dy = -\partial \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \quad (I)$$

El signo menos es arbitrario; es una convención que hace que el valor de ϕ decrezca en la dirección de la velocidad. Comparando los términos de la ecuación (I), $u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$. Esto prueba la existencia, en un flujo en dos dimensiones. Esto también se puede demostrar para un flujo en tres dimensiones. En forma vectorial,

$$V = -\nabla \phi$$

es equivalente a

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (II)$$

La suposición de un potencial de velocidad es equivalente a la suposición del flujo irrotacional, como

$$\text{curl}(-\text{grad} \phi) = \nabla \times (-\nabla \phi) = 0$$

debido a que $\nabla \times \nabla = 0$. Esto se demuestra utilizando la ecuación (II) mediante la diferenciación cruzada

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$$

siempre que $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$, etc. Sustituyendo la ecuación (II) en la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

lleva a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (III)$$

En forma vectorial ésta es

$$\nabla \cdot v = -\nabla \phi = -\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi = 0 \quad (IV)$$

Las ecuaciones (III) y (IV) se le conoce como *ecuaciones de Laplace*. Cualquier función que satisfaga la ecuación de Laplace es un caso de flujo irrotacional posible. Como existe un número infinito de soluciones, cada una de ellas satisface ciertas condiciones de frontera, el problema principal es seleccionar la función apropiada para cada caso particular de flujo.

Dado que ϕ aparece elevada a la primera potencia en cada término, la ecuación (III) es una ecuación lineal y la suma de dos soluciones también es una solución. Si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación (III), entonces $\phi_1 + \phi_2$ es una solución entonces; luego,

$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \quad \nabla^2 \phi_2 = 0$$

y

$$\nabla^2 (\phi_1 + \phi_2) = \nabla^2 \phi_1 + \nabla^2 \phi_2 = 0$$

Lo mismo sucede si ϕ_1 es una solución, C ϕ_1 es una solución si C es una constante.

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN COORDENADAS CARTESIANAS, CILINDRICAS Y ESFERICAS

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes, en el sistema cartesiano:

Componente x:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

Componente y:

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

Componente z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes en el sistema de coordenadas cilíndrico:

Componente r:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r$$

Componente θ :

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta$$

Componente z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

En función de los gradientes de velocidades para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes en el sistema de coordenadas esférico:

Componente r

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_r$$

Componente θ

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right)$$

Componente ϕ

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} - \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) + \rho g_\phi$$

CONDICIONES DE FRONTERA Y CONDICIONES INICIALES PARA PROBLEMAS DE FLUJO DE FLUIDOS

En una frontera fija la componente de la velocidad perpendicular a la frontera debe ser cero en cualquier punto de ésta (fig.1)

$$q \cdot n_1 = 0$$



Fig 1. Notación para la condición de frontera en una frontera fija

donde n_1 es un vector unitario normal a la frontera. En notación escalar esto se expresa fácilmente en términos del potencial de velocidad

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

en todos los puntos de la frontera. Para una frontera móvil (Fig 2), donde un punto en ella tiene una velocidad V , la componente de la velocidad del fluido perpendicular a la frontera debe ser igual a la velocidad de la frontera normal a ésta, por consiguiente,

$$q \cdot n_1 = V \cdot n_1$$

o

$$(q - V) \cdot n_1 = 0$$



Fig 2 Notación para la condición de frontera en una frontera móvil.

Para dos fluidos en contacto, se requiere una condición de frontera dinámica, es decir, la presión debe ser continua en la interfase. Una superficie de corriente en un flujo permanente satisface la condición para una frontera y se puede considerar como frontera sólida.

CONCLUSIONES

Se concluye que con el análisis diferencial se reciben resultados muy exactos de los fenómenos de flujo de fluidos. Mediante el estudio de la teoría de análisis diferencial y la realización de ejercicios de aplicación, permite adquirir conocimientos básicos para el estudio de fenómenos de flujo de fluidos y poder crear, a partir de las formulas matemáticas deducidas a partir del análisis diferencial, patrones de comportamiento del fluido dependientes de variables como el tiempo y la ubicación espacial.

FUENTES CONSULTADAS

GROSS, R; GERHART, P y HOCHSTEIN, J. Fundamentos de Mecánica de los Fluidos. 2ª Edición. Editorial Addison Wesley Iberoamericana.

STREETER, Víctor; L. WYLIE E. Benjamin y BEDFORD Keith W. Mecánica de Fluidos. Novena edición. Editorial Mc Graw Hill Interamericana. 1999

SHAMES, Irving H. Mecánica de fluidos, 3ª Ed. Santafé de Bogotá. McGraw Hill, 1998.

Efecto Magnus

<http://www.sc.edu.es/sbweb/fisica/fluidos/dinamica/magnus/magnus.htm>

Mecánica de Fluidos. Tema 3. Análisis Integral. A. Rivas Nieto. Escuela Superior de Ingenieros Industriales de San Sebastián – Universidad de Navarra

<http://www1.ceit.es/asignaturas/Fluidos1/WEBMF/Mecanica%20de%20Fluidos%20I/ProbMFI/TEMA%2003.pdf>

D. SAMANO Alfonso, SEN Mihir, MOYA Sara. Mecánica de Fluidos.

<http://www.nd.edu/~msen/TermoLat/MecFIWord.pdf>