

Diseño de tobera supersónica

Método de Características

A continuación se mostrara un algoritmo básico para la resolución del perfil de una tobera supersónica, mediante el método de características. Se resolverá una tobera de longitud mas corta y libre de ondas de choque oblicuas [1], suponiéndose flujo isentrópico. Para ello es necesario recordar las ecuaciones que nos servirán para la aplicación del método:

$$K_- = \theta + \nu(M) = \text{const} \quad \text{ec. 1 (a lo largo de la } C_- \text{ característica)}$$

$$K_+ = \theta - \nu(M) = \text{const} \quad \text{ec. 2 (a lo largo de la } C_+ \text{ característica)}$$

$$\theta = \frac{1}{2}(K_- + K_+) \quad \text{ec. 3}$$

$$\nu = \frac{1}{2}(K_- - K_+) \quad \text{ec. 4}$$

$$\mu = \text{sen}^{-1}(1/M) \quad \text{ec. 5}$$

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M^2-1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2-1} \quad \text{ec.6}$$

Como todo método numérico, el lector debe proponer un numero de incrementos para comenzar, en la referencia el autor utilizo siete incrementos, yo trabaje con tres incrementos. Propongo al lector que utilice de 10 incrementos, garantizando obtener un perfil de la tobera mucho mas suavizado y con un valor de relación de áreas garganta-salida muy parecido al que se tiene en las tablas de flujo isentrópico. Igualmente recomiendo al lector resolver el problema utilizando una hoja de calculo, e.g. Microsoft® Excel®, o un programa de análisis de ingeniería CAE, e.g. Mathworks® Matlab® o Microsoft® Visual Basic® y para la conformación del perfil, que no es mas que trazar e interceptar líneas características, podría usarse un programa CAD, e.g. Autodesk® Autocad®.

El siguiente algoritmo para el diseño “numérico” de la tobera fue realizado para un problema con tres (3) incrementos para un MACH_DISEÑO=2,5, el lector deberá adaptarlo para su propia configuración:

- 1) Calcular el valor de $\theta_{MAX} = \frac{1}{2}\nu(MACH_DISEÑO)$
- 2) Elegir el número de divisiones ‘n’ o incrementos conveniente. En este caso 3
- 3) Asumir el valor $0 < \theta_1 < 0,375$
- 4) Los valores de puntos en el eje de la tobera (diferente a punto 1) poseen un valor $\theta=0$. En este caso $\theta_6=\theta_{10}=\theta_{13}=0$
- 5) Calcular $\Delta\theta = \frac{\theta_{MAX} - \theta_1}{n}$
- 6) Calcular $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ siendo: $\theta_i = \theta_{i-1} + \Delta\theta$ para $1 < i < n+1$.
- 7) El valor de θ_{n+2} (borde) es el mismo que θ_{n+1} . Esta consideración aplica para los otros bordes. En este caso $\theta_5=\theta_4$
- 8) Asumir un valor de mach inicial para el punto 1, $1 < M_1 < 1,04$. Yo asumí 1,04
- 9) Calcular valor de: ν, μ, K_+, K_- para punto 1. Utilizando ecuaciones 6, 5, 2 y 1 respectivamente. Se conoce K_+ de puntos i ($1 < i < n+2$). En este caso puntos 2, 3, 4 y 5.

- 10) Con K_+ de 7) y ec. 2, se obtiene v en puntos i ($1 < i < n+2$). En este caso puntos 2, 3, 4 y 5. Calcular M y μ con ecuaciones 6) y 5) respectivamente, para calculo de M , lea luego del “algoritmo de diseño de perfil”.
- 11) Calcula K_- con ec 1 para puntos i ($1 < i < n+1$). En este caso puntos 2, 3, 4, 5. Análogamente con 9), Se conocería K_- de puntos 6; 7, 10; 8, 11, 13 respectivamente.
- 12) Con K_- de 11) y θ de 4) obtengo K_+ del punto 6. De allí conozco K_+ de puntos 7, 8, 9.
- 13) Con ecuaciones 3 y 4 obtengo θ y v de puntos 7, 8 y 9. Calcular M y μ con ecuaciones 6) y 5) respectivamente.
- 14) Para el punto 10, 11, 12; y punto 13 repito procedimiento semejante desde 12).

Terminado el diseño “numérico” de la tobera, procedamos a obtener una tabla de datos que nos van a servir para la construcción. Yo los llame ANGULOABAJO y ANGULOARRIBA, para designar los ángulos de las líneas que parten de un punto (o que llegan a él), lo ilustro de la siguiente forma:

P	ANGULOABAJO	ANGULOARRIBA
1	$\theta-\mu$	
2		$\frac{\theta_i + \mu_i + \theta_{i-1} + \mu_{i-1}}{2}$
3		
4		
5		
6	$\frac{\theta_i - \mu_i + \theta_{i-1} - \mu_{i-1}}{2}$	
7	IDEM a 2,3,4,5	
8		
9		
10	IDEM a 6,7,8	
11	IDEM a 6,7,8	IDEM a 2,3,4,5
12		
13	IDEM a 6,7,8	
14		IDEM a 2,3,4,5

Algoritmo de diseño de perfil. Calculados estos ángulos nos vamos al programa de CAD y procedemos a:

- 1) Dibujar una recta vertical (de longitud unitaria) que representa el semidiámetro y una recta (perpendicular a esta en su extremo) que representa el eje de la tobera.
- 2) A partir del extremo superior de la tobera parten las $n+1$ líneas con los valores de ángulo ANGULOABAJO, la primera línea con ANGULOABAJO de 1 debe cortar con el eje, este el punto 1, las demás líneas no es necesario que corten con el eje. Además se trazara una línea con ángulo TETAMAX que representa el perfil

de la tobera.

- 3) A partir del punto 1 parte una línea característica con ANGULOARRIBA que cortara la anterior realizada, en cada corte el ANGULOARRIBA cambiara, según valores calculados, esta línea característica debe cortar con la línea que representa el perfil. Se habrán obtenido los puntos 2, 3, 4 y 5.
- 4) Se repiten análogamente pasos 3 y 4 hasta lograr el perfil definitivo.
- 5) Utilizando las herramientas de extensión y TRIM del programa CAD harán muy sencillo el diseño. Para la comprobación final se puede acotar el semidiámetro final, y comparar con la relación A/A^* del mach de diseño que esta en las tablas.

OBTENCION DEL VALOR DE MACH A PARTIR DE LA FUNCIÓN DE PRANDTL – MEYER:

Como observamos en necesario obtener el valor de mach de cada punto, para obtener el valor de ángulo de mach y de allí los ángulos que servirán para el diseño. Es muy complicado obtener una expresión explicita mach en función de PRANDTL-MEYER (aunque en ref. [1] se proponen varias expresiones aproximadas); yo propongo obtener el valor de mach por ENSAYO-ERROR-INTERPOLACION (sirve muy bien para EXCEL) y por un método semejante al de HARDY-CROSS (recordemos diseño de tuberías) que sirve muy bien en programas CAE.

Veamos los dos.

Para el método ENSAYO-ERROR-INTERPOLACION utilicemos dos 6 celdas de la hoja de calculo, como se ve a continuación

CALCULO M	MACH
0,005	2,5
-0,035	2,6
INTERP	2,512545

En las dos celdas bajo “CALCULO M” se calcula un valor δ que es obtener la diferencia entre el primer miembro y segundo miembro de la ec.6 utilizando como valor v conocido y dos valores de mach que nosotros estaríamos ensayando, iremos ensayando hasta obtener un valor de positivo y uno negativo. Para obtener el valor de mach “exacto” nos ayudaremos con la ecuación de interpolación que introduciremos al lado de “INTERP”. Siendo los tres valores de la recta conocida: VALOR_POSITIVO – CERO – VALOR_NEGATIVO y los valores que forman la recta con la incógnita: MACH_”POSITIVO” – MACH_”NEGATIVO”. Digo “positivo” y “negativo” relativo a los valores de error.

Por el método semejante a HARDY-CROSS, recordemos que lo utilizamos para el cálculo de tuberías, pero aquí esta mucho más sencillo, me limitare a colocar el código fuente. Este puede utilizarse como una función que puede ser creada en memoria temporal o permanente. A continuación esta el código fuente en MATLAB:

```

funcion [M] = fun_prandtlinv(nu)
k=1.4;
M=1;int=1;
while int
    dnu=nu-(sqrt((k+1)/(k-1))*atan(sqrt((k-1)/(k+1)*(M^2-1)))-atan(sqrt(M^2-1)));
    if abs(dnu)<1e-06
        int=0;
    end
    M=M+dnu;
end

```

¹ ANDERSON, John D. Modern Compressible Flow with Historical Perspective. Tercera Edicion. McGraw-Hill, Boston. 2003.