

Probabilidad y Estadística

Distribucion de Poisson y distribucion exponencial

INTRODUCCIÓN

La Probabilidad, como rama de las matemáticas que se ocupa de medir o determinar cuantitativamente la posibilidad de que ocurra un determinado suceso está basada en el estudio de la combinatoria y es fundamento necesario de la estadística.

La creación de la probabilidad se atribuye a los matemáticos franceses del siglo XVII Blaise Pascal y Pierre de Fermat, aunque algunos matemáticos anteriores, como Gerolamo Cardano en el siglo XVI, habían aportado importantes contribuciones a su desarrollo. La probabilidad matemática comenzó como un intento de responder a varias preguntas que surgían en los juegos de azar, por ejemplo, saber cuántos dados hay que lanzar para que la probabilidad de que salga algún seis supere el 50%.

La probabilidad de un resultado se representa con un número entre 0 y 1, ambos inclusive. La probabilidad 0 indica que el resultado no ocurrirá nunca, y la probabilidad 1, que el resultado ocurrirá siempre.

El cálculo matemático de probabilidades se basa en situaciones teóricas en las cuales puede configurarse un espacio muestral cuyos sucesos elementales tengan todos la misma probabilidad. Por ejemplo, al lanzar un dado ideal, la probabilidad de cada una de las caras es $1/6$. Al lanzar dos dados, la probabilidad de cada uno de los resultados es $1/36$.

El presente trabajo tiene como objetivo el análisis y estudio de dos tipos de distribución como lo es la distribución de Poisson y la distribución exponencial, teniendo como finalidad presentar sus características primordiales, calculo de la media, la varianza y su desviación estándar.

DISTRIBUCIÓN DE POISSON.

Consideremos un problema que se puede resolver por medio de la distribución binomial. Supongamos que inspeccionamos una longitud L de alambre de acero esmaltado, para encontrar las imperfecciones, que tiene, tales como rebabas, rasgaduras, roturas, etc. Supondremos que, para cada intervalo pequeño de longitud ΔL , la probabilidad de una imperfección $\alpha \cdot \Delta L$, donde α (alfa) es una constante que depende de la calidad del alambre, y ΔL es suficientemente pequeño para que se pueden despreciar la probabilidad de hallar dos, o más, imperfecciones en dicho intervalo. Nos interesa la probabilidad de encontrar x imperfecciones en una longitud L de alambre.

Supongamos que hay n intervalos de longitud ΔL , esto es, $n \cdot \Delta L$, y además que la presencia de una imperfección en cualquier intervalo dado, es independiente de la presencia de imperfecciones en cualquiera de los otros intervalos. Podemos considerar, entonces, que los n intervalos forman una succión de n pruebas independientes con una probabilidad constante $\alpha \cdot \Delta L$ de que se presente una imperfección en cualquiera de las pruebas. Se deduce

en consecuencia que la probabilidad de hallar x imperfecciones en una longitud $n \cdot \Delta L$ de alambre es

$$b(x; n, \alpha \cdot \Delta L) =$$

$$\binom{n}{x} (\alpha \Delta L)^x (1 - \alpha \Delta L)^{n-x} \text{ para } x = 0, 1, \dots, n.$$

Como la hipótesis de que sea despreciable la probabilidad de encontrar más de una imperfección por intervalo, sólo es aceptable si ΔL es muy pequeño, hallemos ahora el límite al que se aproxima la probabilidad anteriormente indicada cuando $\Delta L \rightarrow 0$. este nos dará la probabilidad buscada de encontrar x imperfecciones en una longitud L de alambre considerado.

Sustituyendo $\frac{L}{n}$ por ΔL y simplificando la expresión resultante para

$b(x; n, \alpha \cdot \Delta L)$, obtenemos:

$$b(x; n, \alpha \Delta L) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\alpha L}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\alpha L}{n}\right)^{n-x}$$

$$b(x; n, \alpha \Delta L) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x! n^x} (\alpha L)^x \left(1 - \frac{\alpha L}{n}\right)^{n-x}$$

$$b(x; n, \alpha \Delta L) = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{x-1}{n}\right)}{x!} (\alpha L)^x \left(1 - \frac{\alpha L}{n}\right)^{n-x}$$

si ahora hacemos $n \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \rightarrow 1$$

esto

$$\left(1 - \frac{\alpha L}{n}\right)^{n-x} = \left[\left(1 - \frac{\alpha L}{n}\right)^{n/\alpha L}\right]^{\alpha L} \left(1 - \frac{\alpha L}{n}\right)^{-x} \rightarrow e^{-\alpha L}$$

y, por lo tanto, la probabilidad binomial se aproxima a

$$\frac{e^{-\alpha L} (\alpha L)^x}{x!} \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots$$

Esta es la distribución de probabilidad que buscamos de obtener x imperfecciones en una

longitud L del alambre del tipo considerado, y corresponde a la familia de las llamadas **DISTRIBUCIONES DE POISSON**. Sustituyendo αL por el parámetro único λ , la ecuación general de una Distribución de Poisson es

$$f(x; \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots$$

Como esta distribución se define sobre un espacio muestral infinito numerable, es evidente, por la forma como se introduce que poniendo $\lambda = np$, nos dará una buena aproximación de la distribución binomial cuando n es grande y p pequeña.

EJEMPLO 1:

Comparemos $b(2; 100; 0.05)$ con $f(2; 5)$, donde $\lambda = np = 100(0.05) = 5$.

Sustituyendo en las expresiones correspondientes, tenemos

$$b(2; 100, 0.05) = \binom{100}{2} (0.05)^2 (0.95)^{98} = 0.081$$

$$f(2; 5) = e^{-5} \frac{5^2}{2!} = 0.084$$

y es interesante notar que el error es menor que 0.003. una regla práctica aceptable es usar la distribución de poisson para hallar probabilidades binomiales si $n \geq 20$ y $p \leq 0.05$. (si $n \geq 100$, la aproximación es excelente, mientras sea $np \leq 10$).

DEFINICIÓN FORMAL DE LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON.

Sea X una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores $0, 1, 2, \dots$ tal que la función de probabilidad de X esté dada por:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \text{ para } x = 0, 1, 2, \dots$$

donde λ es una constante positiva dada. Esta distribución se llama Distribución de Poisson (en memoria de S.D. Poisson, quien la descubrió a principios del siglo XIX) y una variable aleatoria con esta distribución se dice que está distribuida con la distribución de Poisson.

Los valores de $f(x)$ en la ecuación pueden obtenerse usando la siguiente tabla, que da los valores de $e^{-\lambda}$ para diferentes valores de λ , o utilizando logaritmos.

PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON.

1. El número de resultados que ocurren en un intervalo o región específica es independiente del número que ocurre en cualquier otro intervalo o región del espacio disjunto. De esta forma vemos que el proceso de Poisson no tiene memoria.
2. La probabilidad de que ocurra un solo resultado durante un intervalo muy corto o en una región pequeña es proporcional a la longitud del intervalo o al tamaño de la región y no depende del número de resultados que ocurren fuera de este intervalo o región.
3. La probabilidad de que ocurra más de un resultado en tal intervalo corto o que caiga en tal región pequeña es insignificante.

Media	$\mu = \lambda$
Varianza	$\sigma^2 = \lambda$
Desviación típica	$\sigma = \sqrt{\lambda}$
Coefficiente de sesgo	$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
Coefficiente de curtosis	$\alpha_4 = 3 + (1/\lambda)$
Función generatriz de momentos	$M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$
Función característica	$\phi(w) = e^{\lambda(e^{iw} - 1)}$

La media y la varianza de la distribución de Poisson $p(x; \lambda t)$ tiene el valor λt .

Para verificar que en realidad la media tenga ese valor, podemos escribir:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} = \mu \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

ahora bien, sea $y = x - 1$ lo que da

$$E(X) = \mu \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} = \mu$$

puesto que

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} = \sum_{y=0}^{\infty} p(y, \mu) = 1$$

la varianza de la distribución de Poisson se obtiene al encontrar primero

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} = \mu^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^{x-2}}{(x-2)!}$$

al hacer $y = x - 2$, tenemos

$$E[X(X-1)] = \mu^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} = \mu^2$$

de aquí:

$$\sigma^2 = E[X(X-1)] + \mu - \mu^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu = \lambda t.$$

EJEMPLOS:

1. Durante un experimento de laboratorio el número promedio de partículas radioactivas que pasan a través de un contador de un milisegundo es cuatro. ¿Cuál es la probabilidad de que seis partículas entren al contador en un milisegundo dado?

Solución:

al usar la distribución de Poisson con $x = 6$ y $\lambda t = 4$

$$p(6;4) = \frac{e^{-4} 4^6}{6!} = \sum_{x=0}^6 p(x;4) - \sum_{x=0}^5 p(x;4) = 0.8893 - 0.7851 = 0.1042$$

2. El número promedio de camiones tanque que llega cada día a cierta ciudad portuaria es 10. Las instalaciones en el puerto pueden manejar a lo más 15 camiones tanque por día. ¿cuál es la probabilidad de que en un día dado los camiones se tengan que regresar?.

Solución:

Sea X el número de camiones tanque que llegan

Al usar la distribución de Poisson desde $x=0$ a $x=15$ y encontrando el complementario tenemos el resultado:

$$p(x;10) = \sum_{x=0}^{15} p(x;4) = \sum_{x=0}^{15} \frac{e^{-10} \cdot 10^x}{X!} = 0.95$$

$p=0.95$ representa la probabilidad de recibir de 0 a 15 camiones, es decir, no rebasa la capacidad de las instalaciones. El complementario $p'=0.05$ es la probabilidad de rebasar la capacidad, es decir, de devolver camiones.

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

La variable aleatoria continua X tiene una distribución exponencial, con parámetro β , si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{array} \right\}$$

donde $\beta > 0$

el siguiente teorema y corolario dan la media, la varianza y la desviación estándar de la distribución exponencial

$$\mu = \beta$$

$$\sigma^2 = \beta^2$$

$$\sigma = \beta$$

APLICACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Ejemplo 1:

Suponga que un sistema contiene cierto tipo de componente cuyos tiempo de falla en años está dada por T . La variable aleatoria T se modela bien mediante la distribución exponencial con tiempo medio para la falla $\beta=5$. Si se instalan cinco de estos componentes en diferentes sistemas. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos aún funcionen al final de ocho años?

Solución:

La probabilidad de que un componente dado aún funcione después de ocho años está dada por:

$$P(T>8) = \frac{1}{5} \int_8^{\infty} e^{-t/5} dt = e^{-8/5} = 0.2$$

CONCLUSION

En el estudio de la probabilidad, específicamente de las distribuciones binomiales, podemos encontrar diversas formas de distribución, dependiendo de las características de los valores estudiados.

Para la distribución de Poisson se plantea una probabilidad de un hecho a partir de un valor

promedio conocido, estudiado previamente y de un dato a evaluar.

Igualmente se puede realizar con la distribución exponencial, aunque esta expresión esta en función de un valor exponencial.

FUENTES CONSULTADAS

- ✧ WALPOLE, Meyers. Probabilidad y estadística. 6° edición.
- ✧ Enciclopedia Encarta 2001. Microsoft Corporation.